L2 de MQ1

Curso de Mecânica Quântica 1 - 2010.1 - UFF - Prof. Marco Moriconi

1. Um sistema é composto de duas partes, 1 e 2. Os estados que descrevem estas partes são denotados $|\pm\rangle_i$ com $i = 1, 2$. Inicialmente este sistema está no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2. \tag{1}$$

   (a) Escreva a matriz densidade deste sistema. Verifique que $\mathrm{tr}\rho = \mathrm{tr}\rho^2 = 1$.

   (b) Calcule o traço parcial na parte 2. O sistema assim obtido é descrito por um estado puro?

   (c) Calcule o traço parcial na parte 1 deste sistema. E agora, o sistema obtido é descrito por um estado puro?

   (d) O sistema original é descrito por um estado emaranhado?

   (e) Calcule a entropia do estado original e do estado obtido no intem b). Explique o que aconteceu com a entropia.

2. Considere dois observáveis descritos pelos operadores

$$\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Encontre a relação de incerteza para estes observáveis. Verifique a validade desta relação para o estado dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}. \tag{2}$$

3. Um certo hamiltoniano H que descreve um sistema de dois níveis possui autovalores E_1 e E_2, correspondentes a autoestados $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$. Em $t = 0$ este sistema de dois níveis se encontra no estado $|\psi, 0\rangle = c_1|E_1\rangle + c_2|E_2\rangle$.

   (a) Qual o estado deste sistema em um instante de tempo $t > 0$?

   (b) Calcule ΔE para este estado.

   (c) Calcule a probabilidade de sobrevivência deste estado para um t qualquer. Encontre o menor intervalo de tempo possível, τ, para que a probabilidade de sobrevivência seja mínima. Essa probabilidade pode ser menor do que 1/2? Quanto é $\tau\Delta E$?

4. A Lagrangiana que descreve uma partícula não relativística interagindo com um campo magnético é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{q}}{dt}\right)^2 + e\frac{d\vec{q}}{dt}\cdot\vec{A} - V(q). \tag{3}$$

   Quando consideramos a integral de trajetória para este caso, temos que discretrizar o termos da ação correspondente ao potencial vetor

$$q\int_0^t d\tau\frac{d\vec{q}}{d\tau}\cdot\vec{A} = e\int_0^t d\vec{q}\cdot\vec{A}. \tag{4}$$

Uma maneira de discretizar esta última fórmula seria escrevê-la como o limite de

$$e \sum_{j=0}^{\infty} (\vec{q}_{j+1} - \vec{q}_j) \cdot \vec{A}(\vec{q}'_j). \tag{5}$$

Não é claro, porém, qual deve ser o ponto $\vec{q}_{\bar{j}}$ na expressão anterior. Poderiamos escolher $\vec{q}_{\bar{j}} = \vec{q}_j$ ou $\vec{q}_{\bar{j}} = \vec{q}_{j+1}$ ou algum ponto intermediário. A maneira de resolver esta questão é tomar um ponto qualquer entre $\vec{q}_j$ e $\vec{q}_{j+1}$ e considerar a expressão obtida pela fórmula de Feynman. Escrevendo $\psi(\vec{q}, t+\epsilon)$ e procedendo de forma semelhante ao que fizemos em sala para mostrar que a equação de Schroedinger decorre da integral de trajetória, mostre que a prescrição correta, que fornece a equação de Schroedinger de uma partícula acoplada a um campo magnético, é aquela na qual tomamos $\vec{q}'_j$o ponto médio do intervalo $\vec{q}_j$ e $\vec{q}_{j+1}$.

5. Em sala vimos que o propagador do oscilador harmônico pode ser escrito em termos da integral de trajetória, da seguinte forma:

$$K(q_1, t_1; q_2, t_2) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_c\right) A(t_1 - t_2), \tag{6}$$

onde S_c é a ação da trajetória clássica (trajetória que satisfaz às condições de contorno) e $A(t)$ é dada por

$$A(t) = \int \mathcal{D}\eta \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\eta]\right), \tag{7}$$

onde $S[\eta]$ é a ação do oscilador harmônico que staisfaz às seguinte condições de contorno: $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.

(a) Calcule ação clássica explicitamente.

(b) Usando o resultado do item anterior e a propriedade de composição do propagador, mostre que

$$\frac{A(t_2 - t_1)}{A(t_2 - t)A(t - t_1)} = \sqrt{2\pi i \frac{\sin(t_2 - t)\sin(t - t_1)}{\sin(t_2 - t_1)}}$$

6. Sabemos que o propagador em uma dimensão pode ser escrito da seguinte forma:

$$K(q_2, t_2; q_1, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle q_2|n\rangle\langle n|q_1\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)\right). \tag{8}$$

Considerando a forma explícita do propagador encontrada no item anterior, e fazendo a continuação analítica $t_2 - t_1 = -i\tau$, expanda o propagador em série de potências de $\exp(-\omega\tau)$, onde ω é a frequência angular do oscialdor harmônico. Comparando as duas formulações, encontre os três primeiros estados ligados e níveis de energia do oscilador harmônico.

7. Considere uma partícula de spin 1. Encontre as representações matriciais para os operadores J_i, com $i = 1, 2, 3$.

8. A interação de quadrupolo elétrico acopla o gradiente do campo externo a um tensor de segunda ordem, construído a partir dos operadores de spin.

(a) Escolhendo uma base apropriada, mostre que esta interação pode ser escrita como

$$H_q = A\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}S_x^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}S_y^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}S_z^2\right) \tag{9}$$

(b) Mostre que esse hamiltoniano pode ser escrito como

$$H_q = \alpha(3S_z^2 - \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}) + \beta(S_+^2 + S_-^2) \tag{10}$$

onde α e β são constantes relacionadas a A, e ϕ satisfaz à equação de Laplace.

(c) Encontre os autovalores de H_q para um sistema de spin 3/2.

9. Suoponha que duas partículas interagem por meio de um potencial que depende do spin, dado por $V(r) = V_1(r) + V_2(r)\sigma_1 \cdot \sigma_2$, onde σ_i é o operador de spin da partícula i. Mostre que a equação de Schroedinger para os estados ligados se desacopla em duas equações, uma com potencial $V_1(r) + V_2(r)$ e outra com potencial $V_1(r) - 3V_2(r)$.

10. Considere dois operadores vetoriais $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Mostre que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ é um escalar.

11. Mostre que se um operador comuta com duas componentes do momento angular, enão ele comuta com a terceira componente.

12. Mostre que um operador vetorial em um espaço de Hilbert bidimensional tem, necessariamente, a forma $\mathbf{V} = \lambda_V \sigma$.

13. Considere a soma de três spins 1, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3$.

    (a) Quais os autovalores possíveis para $\mathbf{J}$? Quantos auto estados temos para cada um desses valores?

    (b) Construa o estado $\mathbf{J} = 0$ explicitamente.